N.B: Toutes les probabilités seront calculées à 0,01 près.

PROBLEME

Soit f la fonction à variable réelle définie par $f : x \mapsto \text{Log}\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

A/1/a- Montrer que le domaine de définition de f est IR^+.

b- Etudier les variations de f sur IR^+.

c- Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

2/a- Soit y un réel strictement positif. Résoudre dans IR^+ l'équation en x : $e^x + e^{-x} - 2 = y$.

b- Montrer que f admet sur IR^+ une fonction réciproque g, et déduire de ce qui précède l'expression de g(x).

B-1/ Soit h une fonction numérique à variable réelle, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a- Montrer que h^{-1} admet des primitives sur un intervalle h(I).

b- Soit H une primitive de h^{-1} sur h(I). Démontrer que H∘h est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto xh'(x)$.

c- Soit (α, β) un couple de I^2. Déduire de ce qui précède que

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt.$$

2/a- Calculer f(0) et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$.

b- En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = \frac{(e-1)^2}{e}$ et $y = 0$.

C-1/a- Montrer que $\forall x \in IR^+$, on a $\text{Log}(x+1) \leq f(x) \leq \text{Log}(x+2)$.

b- Soit θ la fonction définie sur IR^+ par $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.

Montrer que θ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et en déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une solution unique γ dans $]1,4[$.

2/ On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(2u_n)$; $\forall n \in IN$.

a) Montrer que $\forall n \in IN; u_n \in [1,2]$

b) Montrer que $\forall n \in IN; |u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}|u_n - \frac{1}{2}\gamma|$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.